

# CHAPTER 6

Torsion in Reinforced Concrete Beams

## ABSTRACT

The average designer probably does not worry about torsion very much. He/she thinks almost exclusively of axial forces, shears, and bending moments, and yet most reinforced concrete structures are subject to some degree of torsion. Until recent years, the safety factors required by codes for the design of reinforced concrete members for shear, moment, and so forth were so large that the effects of torsion could be safely neglected in all but the most extreme cases. Today, however, overall safety factors are less than they used to be and members are smaller, with the result that torsion is a more common problem.

Ali R. Emami

Reinforced Concrete: Mechanics and Design

# طراحی تیر تحت پیچش

## مقدمه

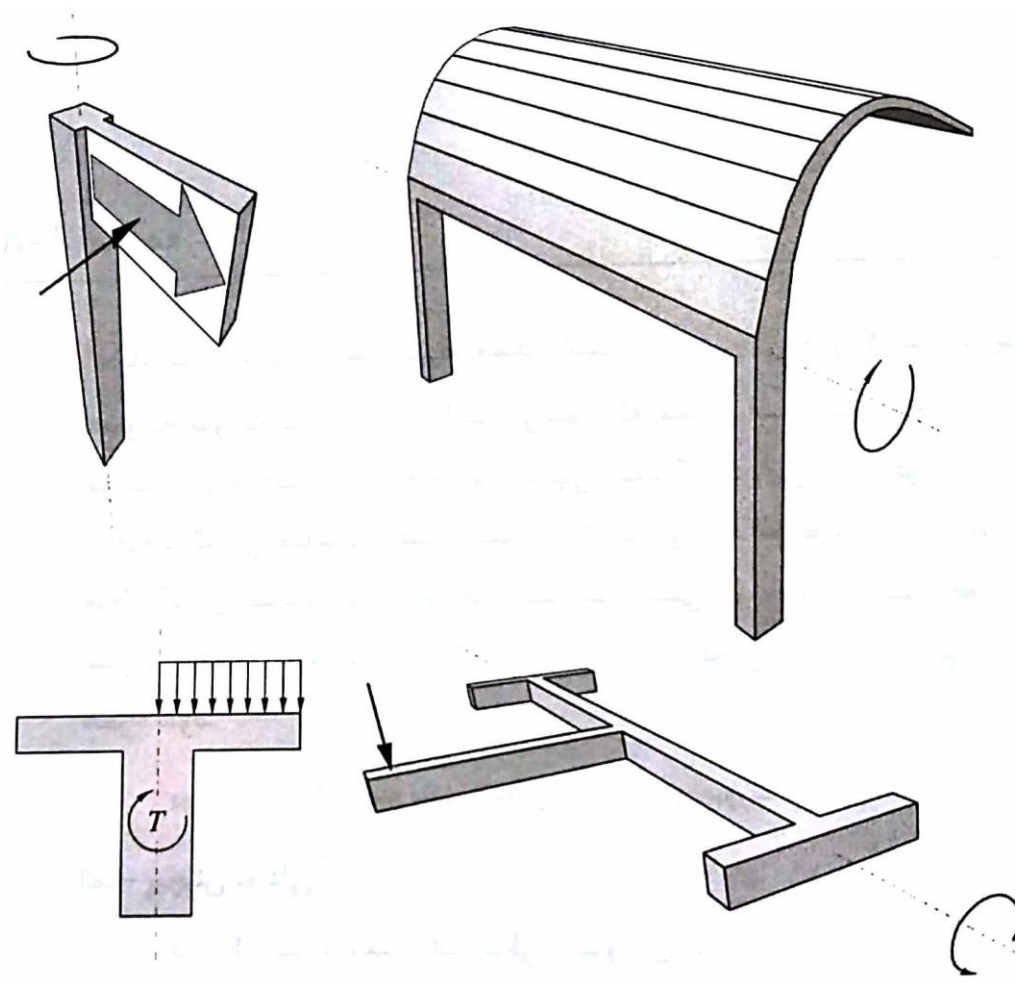
اعضاء بتن‌آرمه و از جمله تیرها ممکن است تحت پیچش قرار گیرند. اثر پیچش در عضو به صورت تنش برشی ظاهر می‌شود که ممکن است منجر به ترک خوردگی مورب با زاویه حدود ۴۵ درجه شود. بدیهی است که اگر این ترک خوردگی با استفاده از فولاد گذاری مناسب محدود نشود، شکست زود هنگام قطعه بتنی اتفاق می‌افتد. فولاد گذاری مناسب برای مقاومت بهتر عضو بتنی در مقابل پیچش، فولاد جان به صورت خاموت بسته است که باید با فولاد گذاری طولی در وجوه داخلی تنگ بسته، همراه شود.

پیچش در یک عضو بتنی ممکن است به دو صورت زیر ایجاد شود:

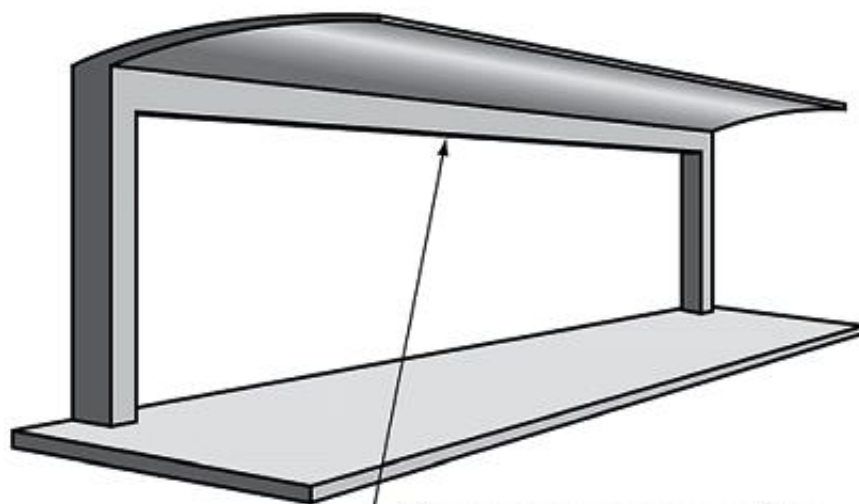
### الف- پیچش تعادلی<sup>۱</sup>

در یک سازه معین استاتیکی، نیروهای داخلی و تنش‌های مربوطه تحت بارگذاری خارجی صرفاً بر اساس معادلات تعادل تعیین می‌شوند و ابعاد اعضاء و به بیان بهتر سختی اعضاء، نقشی در مقدار نیروهای داخلی عضو نخواهند داشت.

در یک سازه معین و یا در یک قسمت معین استاتیکی از سازه نامعین، اگر بار خارج از محور عضو وجود داشته باشد، منجر به ایجاد لنگر پیچشی حول محور طولی عضو خواهد شد که مقدار این پیچش فقط با ارضاء معادلات تعادل تعیین می‌شود. این پیچش به نام "پیچش تعادلی" خوانده می‌شود. نمونه‌هایی از پیچش تعادلی در شکل ۸-۱ نشان داده شده است. بدیهی است که در صورت ایجاد پیچش تعادلی، امکان باز توزیع تنش‌های پیچشی به سایر اعضاء سازه‌ای وجود نداشته و عضو مربوطه باید در مقابل کل پیچش طراحی شود.



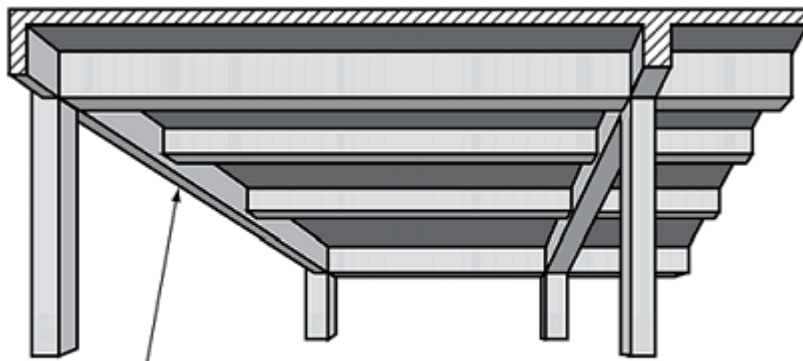
شکل ۸-۱ نمونه‌هایی از ایجاد پیچش تعادلی در یک عضو بتنی



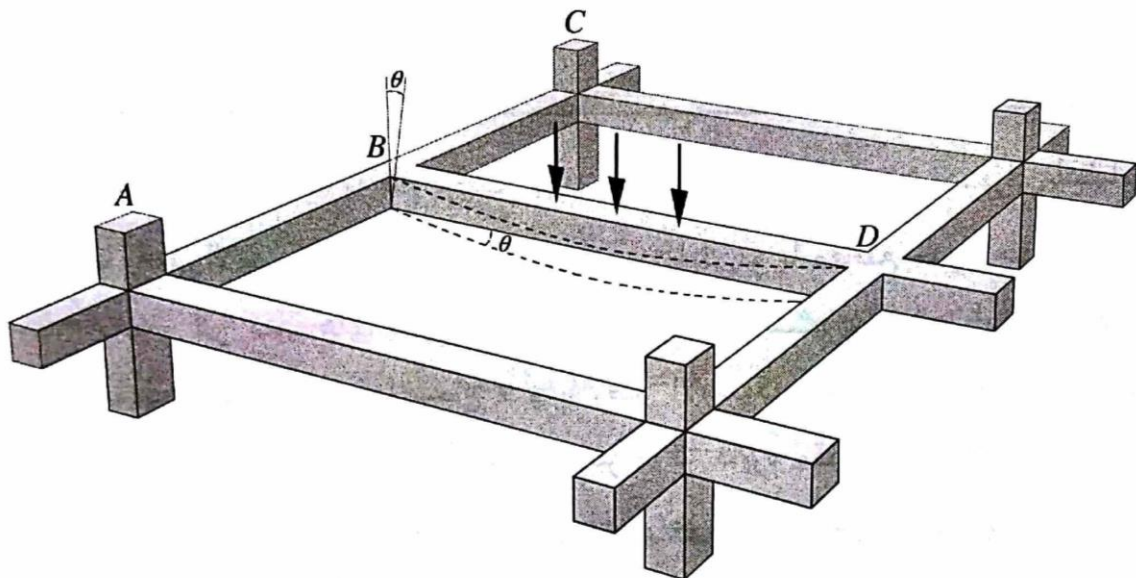
Design torque may **not** be reduced because moment redistribution is **not** possible

## ب- پیچش همسازی<sup>۱</sup>

در یک سازه نامعین، تحت یک شرایط معین بارگذاری، احتمال توزیع نیروها و تنش‌های داخلی به روش‌های مختلفی وجود دارد که همه آن‌ها می‌توانند تعادل داشته باشند. به بیان دیگر در یک سازه نامعین، مسیرهای مختلفی برای توزیع بار وجود دارد که بسته به سختی نسبی اجزاء مختلف سازه، فقط یکی از آن‌ها رخ می‌دهد. بدین ترتیب فقط با تغییر سختی یکی از اعضاء، ممکن است توزیع تنش و برآیند تنش‌ها در کل سازه تغییر کند. پیچشی که در یک عضو واقع در یک سازه نامعین با ارضاء معادلات همسازی ایجاد می‌شود و سختی نسبی آن عضو و یا اعضاء مجاور در میزان پیچش مربوطه اثر می‌گذارد، به نام "پیچش همسازی" خوانده می‌شود. اکثر مواردی که لنگر پیچشی در یک عضو بتن‌آرمه اتفاق می‌افتد، از این نوع پیچش است.



Design torque for this spandrel beam may be reduced because moment redistribution is possible





در آستانه ترک خوردگی پیچشی، اعضاء بتن‌آرمه پیچش نسبتاً بزرگی را تحمل می‌کنند. با این وجود در اعضاء با فولاد پیچشی متوسط، سختی پیچشی بعد از ترک خوردگی فقط کسر کوچکی از سختی پیچشی قبل از ترک خوردگی است. این مسأله منجر به باز توزیع نیروها و لنگرها پس از ترک خوردگی پیچشی شده و سبب کاهش لنگر پیچشی در عضو می‌شود. بدین ترتیب در اکثر مسائل عملی، حداکثر لنگر پیچشی در یک عضو بتن‌آرمه به صورت پیچش همسازی، مقدار متناظر با پیچش ترک خوردگی عضو خواهد بود.

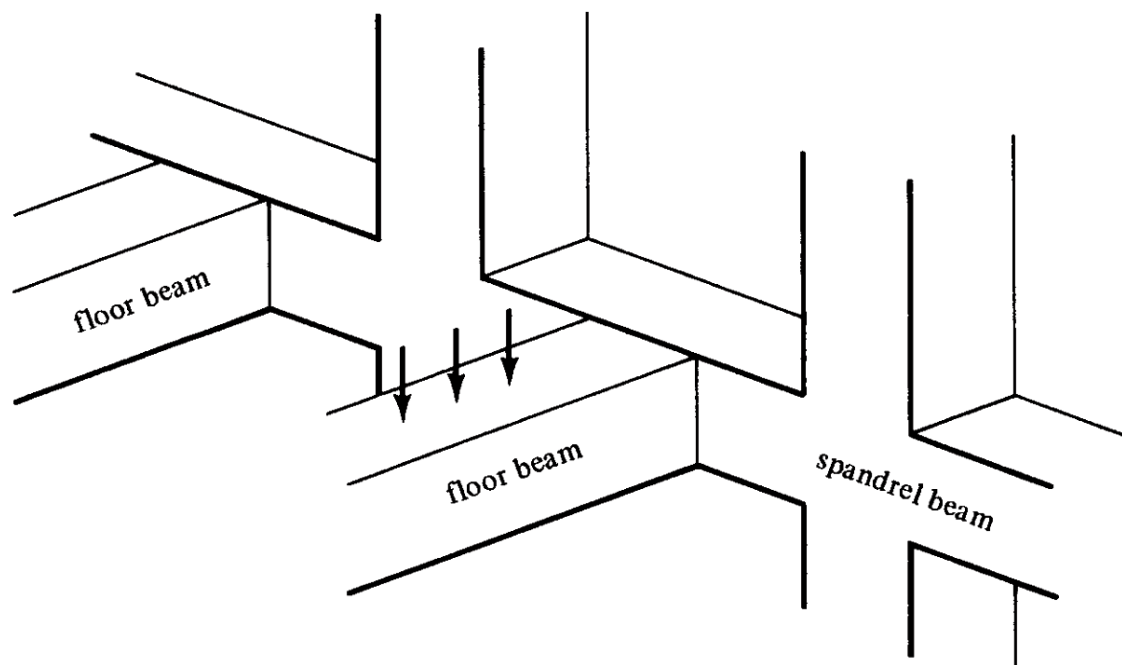


FIGURE 15.1 Torsion in spandrel beams.

از این مقدمه معلوم می‌شود که در سازه‌های متداول بتن آرمه، معمولاً پیچش یک مشکل بسیار جدی محسوب نمی‌شود؛ چرا که از یک طرف پیچش تعادلی به‌ندرت اتفاق می‌افتد، و از طرف دیگر پیچش همسازی نیز معمولاً به پیچش ترک خوردگی محدود می‌شود. پیچش نظیر ترک خوردگی نیز با دقت خوب قابل پیش‌بینی بوده و مقدار آن نسبتاً کم است.

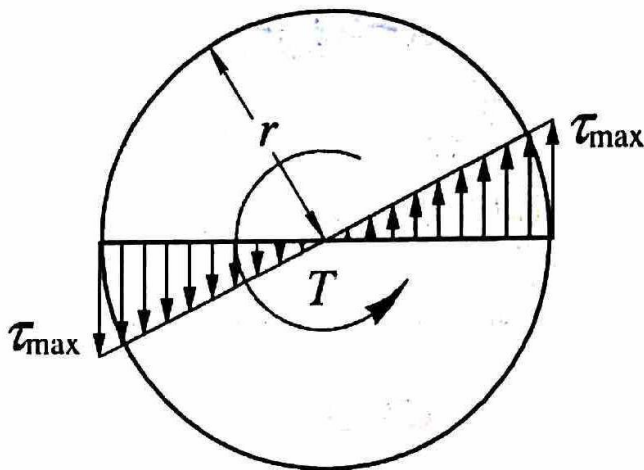
## مقاطع توپر تحت پیچش

### ۱- تئوری پیچش

تئوری پیچش که به نام پیچش سنت و نانت<sup>۱</sup> نیز خوانده می‌شود، برای اعضاء منشوری با رفتار الاستیک و با مقطع دایروی، مستطیلی و یا مقاطع مدور جدار نازک، به طور مفصل در کتاب‌های مقاومت مصالح آورده شده است. بر اساس این تئوری برای یک مقطع توپر دایروی با شعاع  $r$  و با رفتار الاستیک که تحت پیچش  $T$  قرار گرفته باشد، تنش برشی ناشی از پیچش در مرکز دایره مقدار صفر داشته و توزیع آن به طرف محیط دایره به صورت خطی تغییر می‌کند؛ به طوری که بیش‌ترین تنش روی محیط دایره برابر است با (شکل ۸-۳-الف):

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot r}{J} \quad (۱-۸)$$

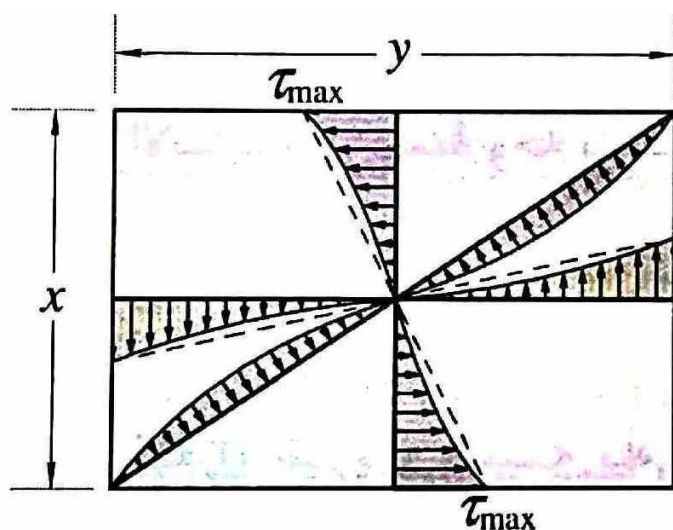
که  $J$  ممان اینرسی قطبی مقطع بوده و برابر  $J = \pi r^4 / 2$  می‌باشد.



در مقاطع توپر مستطیلی، رفتار تحت پیچش با مشکلات بیش‌تری همراه خواهد بود؛ چرا که مقاطع مسطح در اثر لنگر پیچشی وارده دچار پیچیدگی<sup>۱</sup> می‌شوند. لنگر پیچشی وارد بر یک مقطع مستطیلی با رفتار الاستیک، سبب ایجاد تنش‌های محوری و تنش‌های برشی محیطی خواهد شد (شکل ۸-۳-ج)؛ به طوری که این تنش‌ها در گوشه‌های مقطع و در مرکز مستطیل مقدار صفر داشته و در میانهٔ وجوه محیطی مستطیل، بیش‌ترین مقدار را خواهد داشت. بیش‌ترین تنش برشی ناشی از وارد شدن پیچش  $T$  بر یک مستطیل با بعد کوچک  $x$  و بعد بزرگ  $y$  و با رفتار الاستیک، در وسط وجه بزرگ‌تر مستطیل ایجاد شده و به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

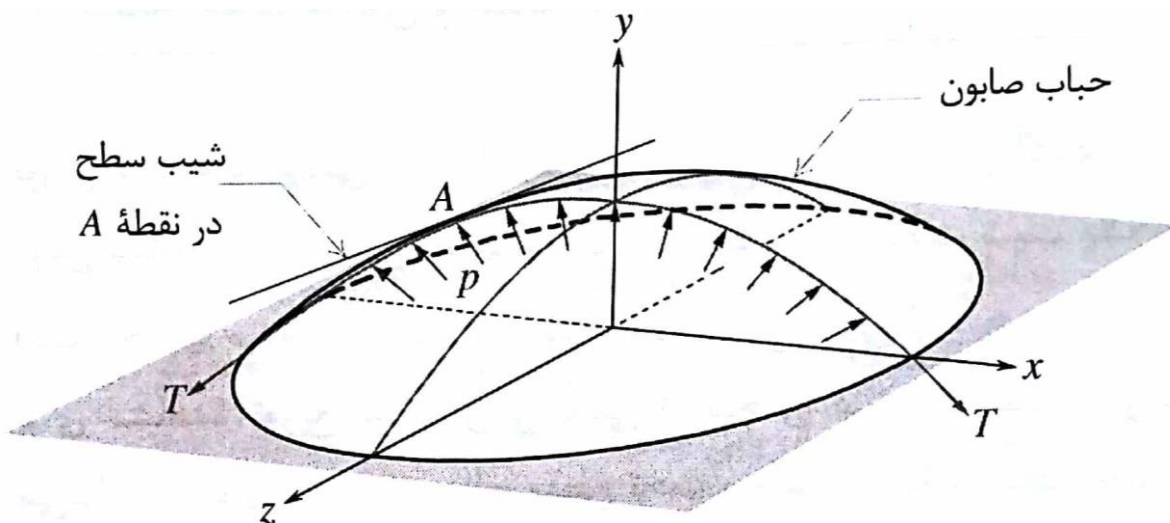
$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha x^2 y} \quad (۳-۸)$$

که  $\alpha$  ضریب وابسته به ابعاد مقطع است و برای  $y/x = 1.0$ ،  $\alpha = 0.208$  بوده و برای  $y/x = \infty$ ،  $\alpha = 0.333$  می‌باشد. یک تقریب مناسب برای ضریب  $\alpha$  به‌صورت  $\alpha = 1/(3 + 1.8x/y)$  بیان می‌شود.



## ۲-۱ تشابه حباب صابون و تشابه توده ماسه

توزیع تنش‌های برشی ناشی از پیچش در یک مقطع با رفتار الاستیک را می‌توان با روش تشابه حباب صابون<sup>۱</sup> مجسم نمود. در حقیقت معادلات شیب یک غشاء باد شده (نظیر حباب صابون)، مشابه معادلات تنش برشی ناشی از پیچش است. بدین ترتیب برای مشاهده توزیع تنش برشی ناشی از پیچش در یک مقطع با رفتار الاستیک، می‌توان بازشویی به شکل سطح مقطع تحت پیچش، در یک صفحه ایجاد کرد و آن را با یک لایه از کف صابون پوشاند، و غشاء نازک ایجاد شده از صابون را باد کرد. این تشابه برای مقاطع مختلف در شکل ۸-۴ نشان داده شده است.



شکل ۸-۴ الف روش تشابه حباب صابون را در مشاهده تنش برشی ناشی از پیچش در یک مقطع دایروی با رفتار الاستیک نشان می‌دهد. شیب حداکثر غشاء باد شده از حباب صابون در یک بازشوی دایروی در هر نقطه، متناسب با تنش برشی ناشی از پیچش در همان نقطه خواهد بود. تنش برشی یاد شده در هر نقطه از مقطع، در راستای متعامد بر جهت خط بیش‌ترین شیب اثر می‌کند. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که شیب یک خط شعاعی در این غشاء باد شده، از صفر در مرکز غشاء تا مقدار حداکثر در لبه دایره افزایش می‌یابد که مشابه تغییرات تنش برشی در شکل



## مقاطع توخالی جدار نازک تحت پیچش

در شکل ۶-۸ یک مقطع توخالی جدار نازک تحت لنگر پیچشی  $T$  حول محور طولی  $x$  نشان داده شده است. ضخامت این مقطع در حالت کلی متغیر در نظر گرفته می‌شود. اگر قسمتی از جداره این مقطع که بین نقطه  $A$  با ضخامت  $t_A$  و نقطه  $B$  با ضخامت  $t_B$  محصور است، در طول  $dx$  جدا شود (شکل ۶-۸-ب)، برای ارضاء شرط تعادل، نیروهای اثر کننده روی وجوه  $AA'$  و  $BB'$  از این قسمت جدا شده باید مساوی باشند؛ یعنی  $V_{AA'} = V_{BB'}$ . حال اگر تنش‌های برشی اثر کننده روی وجوه  $AA'$  و  $BB'$  به ترتیب با  $\tau_A$  و  $\tau_B$  نمایش داده شود، خواهیم داشت:  $V_{AA'} = \tau_A t_A dx$  و  $V_{BB'} = \tau_B t_B dx$ . بنابراین با ارضاء تعادل،  $\tau_A t_A = \tau_B t_B$  خواهد شد. از طرفی اگر المان‌های بسیار کوچکی از مقطع را در نقاط  $A$  و  $B$  در نظر بگیریم، به دلیل تعادل، تنش برشی روی وجوه هر المان در راستای  $x$  با تنش برشی روی وجوه المان که بر مقطع توخالی منطبق هستند، مساوی خواهد بود؛ یعنی تنش برشی روی مقطع در نقاط  $A$  و  $B$  نیز به ترتیب  $\tau_A$  و  $\tau_B$  خواهند بود. از آن جا که  $A$  و  $B$  دو نقطه اختیاری از مقطع بودند و حاصل ضرب تنش برشی در ضخامت مقطع در این دو نقطه با هم مساوی شده‌اند؛ در هر نقطه دیگری از مقطع نیز این حاصل ضرب باید مقداری ثابت داشته باشد؛ یعنی در کلیه نقاط یک مقطع جدار نازک تحت پیچش داریم:

$$q = \tau t = cte \quad (6-8)$$

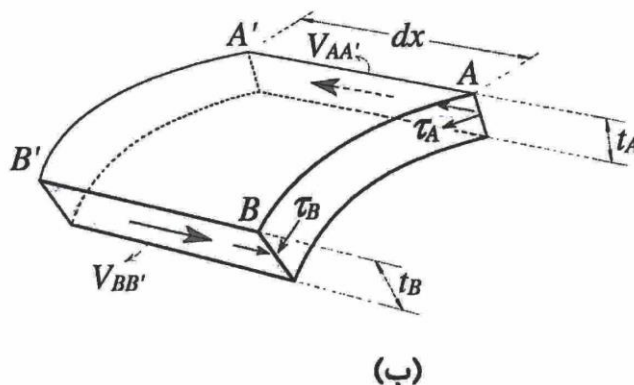
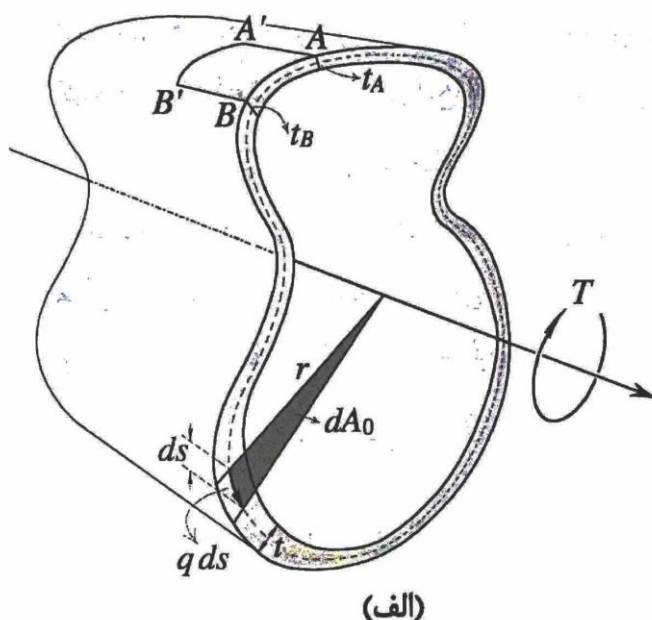
متغیر  $q$  به نام جریان برش<sup>۱</sup> خوانده می‌شود و واحد نیرو بر واحد طول (N/mm) دارد. علت نامیدن  $q$  با جریان برش، شباهت رفتاری آن به جریان آب در یک لوله بسته با قطر متغیر است که در هر مقطع و در طول زمان ثابت، مقدار آب عبوری (دبی آب) ثابت می‌باشد.

از آنجا که جریان برش  $q$  مقداری ثابت است، از انتگرال خارج شده و بنابراین با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$T = 2q A_o = 2t \tau A_o \quad (۸-۸)$$

که  $A_o$  مساحت محصور بین میان تار (خط میانی) مقطع جدار نازک است. بدین ترتیب تنش برشی ایجاد شده در یک قسمت مشخص با ضخامت  $t$  از مقطع جدار نازک تحت پیچش  $T$  برابر است با:

$$\tau = \frac{T}{2A_o t} \quad (۹-۸)$$



شکل ۸-۶ (الف) مقطع توخالی جدار نازک تحت پیچش؛ (ب) قطعه جدا شده‌ای از مقطع به طول  $dx$

حال اگر المان کوچکی از مقطع را با ضخامت  $t$  و عرض  $ds$  در نظر بگیریم (شکل ۸-۶-الف)، و فرض کنیم تنش برشی اثر کننده روی این المان برابر  $\tau$  است، نیروی برشی روی این المان برابر  $q ds = \tau t ds$  خواهد بود که این نیرو روی میان تار المان اثر می‌کند. اگر فاصله میان تار المان تا مرکز مقطع را  $r$  فرض کنیم، لنگر پیچشی بسیار کوچکی که با مقاومت برشی این المان ایجاد می‌شود، برابر است با:

$$dT = q ds \times r$$

چنانچه مساحت محصور بین خطوط شعاعی رسم شده از مرکز در محدوده عرض  $ds$  تا میان تار المان را با  $dA_0$  نمایش دهیم،  $dA_0 = r ds / 2$  بوده و با انتگرال گیری روی کل سطح مقطع جدار نازک داریم:

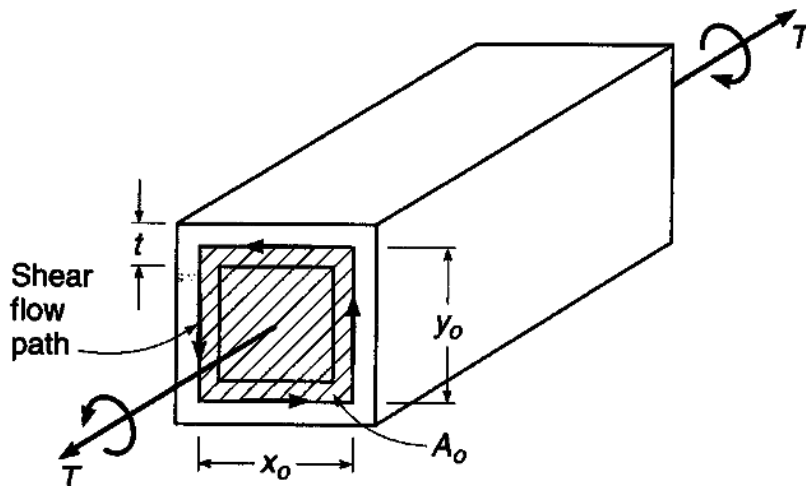
$$T = \int_A 2q dA_0 \quad (7-8)$$

از آنجا که جریان برش  $q$  مقداری ثابت است، از انتگرال خارج شده و بنابراین با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$T = 2q A_0 = 2t \tau A_0 \quad (8-8)$$

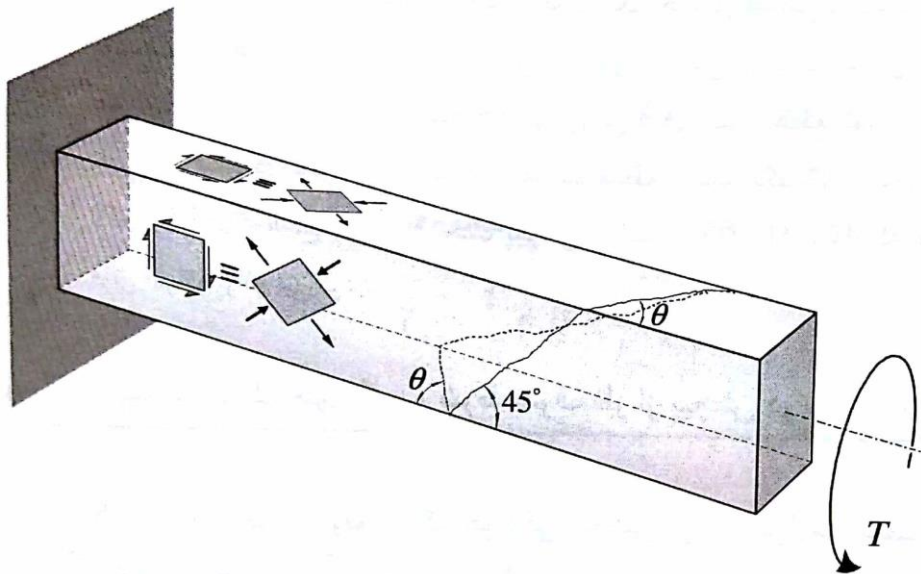
که  $A_0$  مساحت محصور بین میان تار (خط میانی) مقطع جدار نازک است. بدین ترتیب تنش برشی ایجاد شده در یک قسمت مشخص با ضخامت  $t$  از مقطع جدار نازک تحت پیچش  $T$  برابر است با:

$$\tau = \frac{T}{2A_0 t} \quad (9-8)$$



## بررسی تیر بتن آرمه تحت پیچش بر اساس آیین نامه

با این وجود *ACI 318* از سال ۱۹۹۵ به بعد، تئوری طراحی خود را بر مبنای تشابه سطح توخالی جدار نازک و خرپای فضایی<sup>۱</sup> استوار نمود. این تئوری طراحی توسط بسیاری از آیین نامه‌ها نظیر آیین نامه بین‌المللی اروپا، آیین نامه بتن کانادا و نیز آیین نامه بتن ایران مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۷-۸ تنش‌های برشی و تنش‌های اصلی ناشی از اثر پیچش بر یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی و مکانیزم ترک خوردگی در آن

در روش تشابه سطح توخالی جدار نازک-خرپای فضایی، تیری که تحت پیچش قرار گرفته است، با صرف نظر از بتن قسمت میانی مقطع، مانند یک مقطع جدار نازک در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، پس از آن که مقطع بتن آرمه تحت پیچش ترک می‌خورد، مقاومت پیچشی توسط پوسته بیرونی مقطع فراهم می‌شود. در این پوسته خاموت‌های بسته پیچشی و نیز میلگردهای طولی پیچشی که در چهار گوشه خاموت مدل شده‌اند، چارچوب اصلی یک خرپای فضایی را تشکیل می‌دهند که توسط بست‌های بتنی مورب که همان بتن موجود بین دو ترک قطری مورب است، به هم متصل شده‌اند.



## ۲ پیچش ترک خوردگی و شرط صرف نظر از پیچش در محاسبات

ACI 318 تا قبل از وقوع ترک خوردگی پیچشی در تیر بتن آرمه، مقطع بتنی (توپر یا توخالی) تحت پیچش خالص را با یک مقطع توخالی جدار نازک تقریب می‌زند؛ به طوری که ضخامت دیواره این مقطع برابر  $t = 0.75A_{cp} / P_{cp}$  بوده و مساحت محصور در میان تار دیواره‌های مقطع برابر  $A_0 = (2/3)A_{cp}$  است. در این روابط  $A_{cp}$  مساحت محصور بین بیرونی‌ترین خط محیطی مقطع بتنی بر حسب  $\text{mm}^2$ ، و  $P_{cp}$  محیط بیرونی‌ترین خط محیطی مقطع بتنی بر حسب  $\text{mm}$  می‌باشد. با وارد کردن مقادیر فوق در رابطه  $\tau = T / (2A_0 t)$  (رابطه ۸-۹)، خواهیم داشت:

$$\tau = \frac{TP_{cp}}{A_{cp}^2} \quad (10-8)$$

فرض می‌شود که ترک خوردگی پیچشی وقتی رخ می‌دهد که تنش کششی اصلی به مقاومت کششی بتن تحت رفتار دو محوری کششی- فشاری برسد؛ این تنش مقداری کمتر از مقاومت کششی تک محوری بتن داشته و برابر  $(1/3)\sqrt{f'_c}$  در نظر گرفته می‌شود. با جانشینی این مقدار در رابطه (۸-۱۰)، لنگر پیچشی ترک خوردگی تحت پیچش خالص ( $T_{cr}$ ) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_{cr} = \frac{1}{3}\sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) \quad (11-8)$$

در ترکیب برش و پیچش، بار ترک خوردگی پیچشی از منحنی اثر متقابل تقریباً دایروی با برش تبعیت کرده و نشان داده می‌شود که پیچشی معادل  $0.25T_{cr}$ ، فقط حدود ۳ درصد از ظرفیت برشی بتن می‌کاهد. به همین جهت *ACI 318* اجازه می‌دهد که در صورتی که لنگر پیچشی محاسباتی تحت بارهای با ضریب  $(T_u)$ ، از  $0.25\phi T_{cr}$  کم‌تر باشد، بتوان از اثر پیچش در مقطع صرف‌نظر کرد. بنابراین شرط مجاز بودن برای صرف‌نظر کردن از پیچش مقطع به صورت زیر خواهد بود:

$$T_u \leq \frac{1}{12} \phi \sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) \quad (۱۲-۸)$$

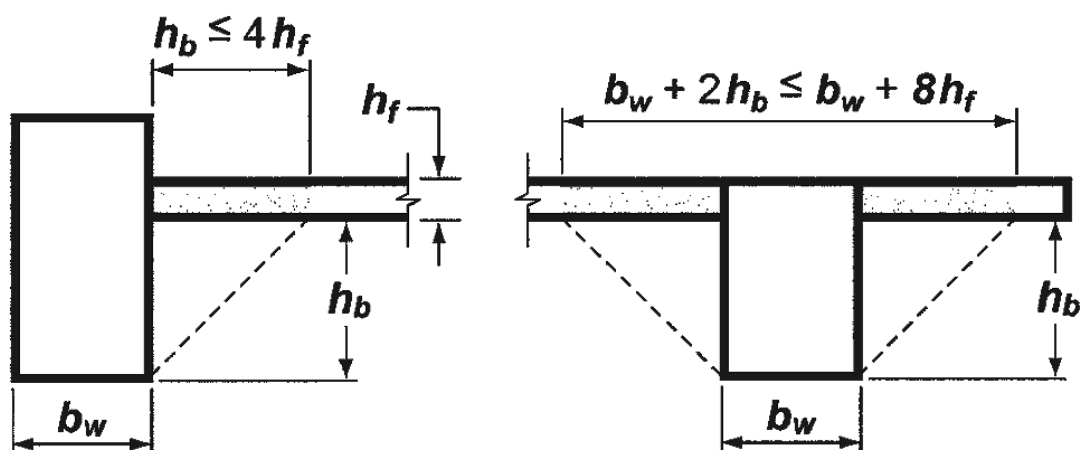
که  $\phi$  ضریب کاهش مقاومت در پیچش بوده و مانند برش  $\phi = 0.75$  در نظر گرفته می‌شود.

بر اساس *ACI 318* اگر عضو بتنی علاوه بر پیچش، تحت نیروی محوری کششی یا فشاری قرار گرفته باشد، شرط صرف‌نظر از پیچش به صورت زیر خواهد بود:

$$T_u \leq \frac{1}{12} \sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) \sqrt{1 + \frac{3N_u}{A_g \sqrt{f'_c}}} \quad (۱۳-۸)$$

که  $N_u$  نیروی محوری با ضریبی است (بر حسب نیوتن) که به‌طور هم‌زمان با  $T_u$  اتفاق می‌افتد، و در فشار به صورت مثبت و در کشش به صورت منفی در نظر گرفته می‌شود. همچنین  $A_g$  سطح مقطع ناخالص بتن بر حسب  $\text{mm}^2$  است و برای مقطع توخالی، شامل سطح حفره‌ها نمی‌شود.

بر اساس آیین‌نامه در یک مقطع توخالی تحت پیچش، در روابط (۸-۱۲) و (۸-۱۳) به جای  $A_{cp}$  از  $A_g$  استفاده می‌شود. مقطع مجوف در پیچش به مقطعی با یک یا چند حفره اطلاق می‌شود که در آن  $A_g / A_{cp} < 0.95$  باشد. همچنین بر اساس آیین‌نامه، در مقاطع بال‌دار مجزا و یا مقاطع بال‌داری که همراه با دال ریخته شده باشند، در محاسبه  $A_{cp}$  و  $P_{cp}$  (و نیز در محاسبه  $A_g$  به جای  $A_{cp}$ )، قسمتی از بال در هر طرف جان نیز منظور می‌شود. این قسمت در هر طرف جان برابر حداقل دو مقدار بیرون‌زدگی جان نسبت به بال و چهار برابر ضخامت بال در نظر گرفته می‌شود  $(\min\{h - h_f, 4h_f\})$ .  $A_{cp}^2 / P_{cp}$  عبارت می‌کند که در حالتی که عبارت برای تیر بدون بال کم‌تر محاسبه شده برای تیر همراه با بال، از مقدار همین عبارت برای تیر بدون بال کم‌تر شود، از وجود بال‌ها صرف‌نظر گردد.

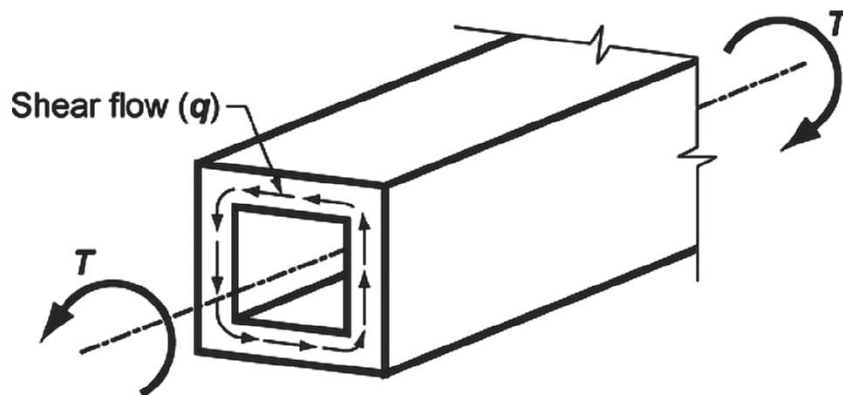


**Fig. R9.2.4.4**—Examples of the portion of slab to be included with the beam for torsional design.

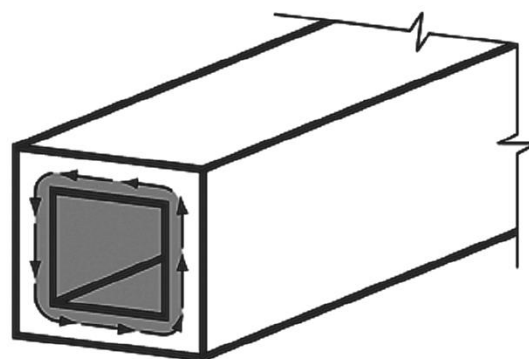
## 22.7—Torsional strength

**22.7.1.1** This section shall apply to members if  $T_u \geq \phi T_{th}$ , where  $\phi$  is given in Chapter 21 and threshold torsion  $T_{th}$  is given in 22.7.4. If  $T_u < \phi T_{th}$ , it shall be permitted to neglect torsional effects.

**22.7.2.1** The value of  $\sqrt{f'_c}$  used to calculate  $T_{th}$  and  $T_{cr}$  shall not exceed 8.3 MPa.



(a) *Thin-walled tube*



(b) *Area enclosed by shear flow path*



## 22.7.4 Threshold torsion

22.7.4.1 Threshold torsion  $T_{th}$  shall be calculated in accordance with Table 22.7.4.1(a) for solid cross sections and Table 22.7.4.1(b) for hollow cross sections, where  $N_u$  is positive for compression and negative for tension.

**Table 22.7.4.1(a)—Threshold torsion for solid cross sections**

Type of member	$T_{th}$	
Nonprestressed member	$0.083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)$	(a)
Prestressed member	$0.083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)\sqrt{1+\frac{f_{pc}}{0.33\lambda\sqrt{f'_c}}}$	(b)
Nonprestressed member subjected to axial force	$0.083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)\sqrt{1+\frac{N_u}{0.33A_g\lambda\sqrt{f'_c}}}$	(c)

**Table 22.7.4.1(b)—Threshold torsion for hollow cross sections**

Type of member	$T_{th}$	
Nonprestressed member	$0.083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_g^2}{P_{cp}}\right)$	(a)
Prestressed member	$0.083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_g^2}{P_{cp}}\right)\sqrt{1+\frac{f_{pc}}{0.33\lambda\sqrt{f'_c}}}$	(b)
Nonprestressed member subjected to axial force	$0.083\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_g^2}{P_{cp}}\right)\sqrt{1+\frac{N_u}{0.33A_g\lambda\sqrt{f'_c}}}$	(c)

در بخش ۸-۱ توضیح داده شد که پیچش در یک عضو بتن‌آرمه ممکن است به صورت پیچش تعادلی و یا پیچش همسازی ایجاد شود. در حالتی که لنگر پیچشی با ضریب  $(T_u)$  در یک عضو به جهت حفظ تعادل لازم است، عضو بتن‌آرمه باید برای تحمل کل پیچش طراحی گردد. در این حالت برای محاسبات پیچشی در تکیه‌گاه، می‌توان مقطع بحرانی را به فاصله  $d$  از بر تکیه‌گاه در نظر گرفت؛ مگر آن که در این فاصله یک لنگر پیچشی متمرکز وجود داشته باشد که در این صورت باید مقطع بحرانی برای محاسبات پیچشی در تکیه‌گاه را بر تکیه‌گاه در نظر گرفت.

### **22.7.3** *Factored design torsion*

**22.7.3.1** If  $T_u \geq \phi T_{cr}$  and  $T_u$  is required to maintain equilibrium, the member shall be designed to resist  $T_u$ .

**9.4.4.3** Sections between the face of support and a critical section located  $d$  from the face of support for nonprestressed beams or  $h/2$  from the face of support for prestressed beams shall be permitted to be designed for  $T_u$  at that critical section unless a concentrated torsional moment occurs within this distance. In that case, the critical section shall be taken at the face of the support.

در یک سازه نامعین استاتیکی که امکان کاهش لنگر پیچشی در عضو به دلیل بازتوزیع نیروهای داخلی پس از وقوع ترک خوردگی پیچشی وجود دارد، بیشترین لنگر پیچشی با ضریب در عضو می‌تواند در حد پیچش ترک خوردگی محدود گردد. بر همین اساس ACI 318 اجازه می‌دهد که در حالت پیچش همسازی، حداکثر لنگر پیچشی محاسباتی با ضریب در مقطع به مقادیر زیر محدود گردد:

- برای مقاطع تحت پیچش (بدون بار محوری)

$$T_u = \phi T_{cr} = \frac{1}{3} \phi \sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) \quad (38-8)$$

- برای مقاطع تحت پیچش و نیروی محوری کششی یا فشاری

$$T_u = \phi T_{cr} = \frac{1}{3} \phi \sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right) \sqrt{1 + \frac{3N_u}{A_g \sqrt{f'_c}}} \quad (39-8)$$

متغیرهای به کار رفته در این روابط، در ذیل روابط (۱۲-۸) و (۱۳-۸) توضیح داده شده‌اند. دقت شود که در روابط (۳۸-۸) و (۳۹-۸)، برای مقاطع توخالی هم  $A_{cp}$  نباید با  $A_g$  جانشین شود.

### 22.7.3 Factored design torsion

22.7.3.2 In a statically indeterminate structure where  $T_u \geq \phi T_{cr}$  and a reduction of  $T_u$  can occur due to redistribution of internal forces after torsional cracking, it shall be permitted to reduce  $T_u$  to  $\phi T_{cr}$ , where the cracking torsion  $T_{cr}$  is calculated in accordance with 22.7.5.

## 22.7.5 Cracking torsion

**22.7.5.1** Cracking torsion  $T_{cr}$  shall be calculated in accordance with Table 22.7.5.1 for solid and hollow cross sections, where  $N_u$  is positive for compression and negative for tension.

**Table 22.7.5.1—Cracking torsion**

Type of member	$T_{cr}$	
Nonprestressed member	$0.33\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)$	(a)
Prestressed member	$0.33\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)\sqrt{1+\frac{f_{pc}}{0.33\lambda\sqrt{f'_c}}}$	(b)
Nonprestressed member subjected to axial force	$0.33\lambda\sqrt{f'_c}\left(\frac{A_{cp}^2}{P_{cp}}\right)\sqrt{1+\frac{N_u}{0.33A_g\lambda\sqrt{f'_c}}}$	(c)



### ۳- محاسبات پیچش و تعیین فولاد پیچشی لازم

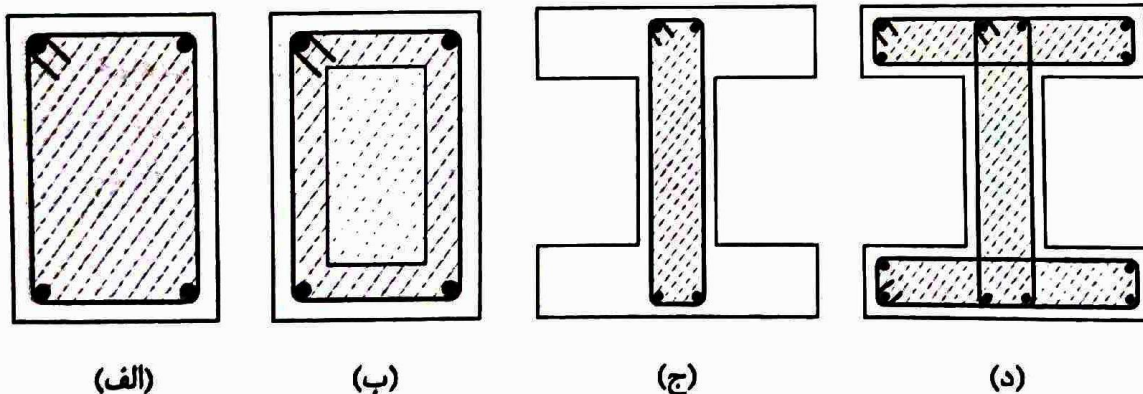
در یک تیر بتنی تحت پیچش خالص، اگر رابطه (۸-۱۲) برقرار نبود، پیچش در محاسبات وارد می‌شود. در این حالت می‌توان رفتار تیر را مشابه یک خرپای فضایی متشکل از فولادهای طولی در گوشه، فولادهای عرضی به صورت تنگ بسته و اعضاء فشاری قطری از بتن به شکل دورپیچ بین ترک‌های مورب، در نظر گرفت (شکل ۸-۸). اگر بعد کوچک و بزرگ مقطع به ترتیب با  $x$  و  $y$ ، و فاصله مرکز تا مرکز خاموت‌ها در راستای  $x$  و  $y$  به ترتیب با  $x_0$  و  $y_0$  نمایش داده شود، عرض و ارتفاع این خرپای فضایی  $x_0$  و  $y_0$  خواهد بود. همچنین زاویه ترک‌های مورب با افق با  $\theta$  نمایش داده می‌شود که نزدیک به ۴۵ درجه بوده، ولی برای لنگرهای پیچشی بالا ممکن است بین ۳۰ تا ۶۰ درجه متغیر باشد. جریان برش در محیط مقطع جدار نازک که همان محدوده پیرامونی خرپای فضایی است، بر اساس رابطه (۸-۸) به صورت  $q = T / 2A_0$  خواهد بود.

ACI 318 اجازه می‌دهد که سطح  $A_0$  برابر  $0.85A_{oh}$  گرفته شود، که  $A_{oh}$  سطح محصور توسط خط مرکزی بیرونی‌ترین خاموت‌های بسته پیچشی است. در شکل ۸-۱۰ سطح  $A_{oh}$  در چند مقطع مسلح به خاموت بسته پیچشی نشان داده شده است. با منظور کردن  $\theta = 45^\circ$  و  $A_0 = 0.85A_{oh}$  بر اساس ACI 318، رابطه (۸-۱۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

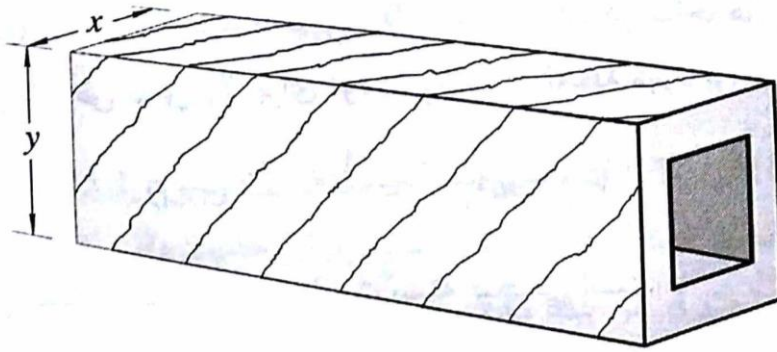
$$T_n = \frac{1.7A_{oh}A_t f_{yt}}{s} \quad (۸-۱۹)$$

پیچش محاسبه شده تحت بارهای با ضریب ( $T_u$ ) باید از مقاومت پیچشی اسمی مقطع ضرب در ضریب کاهش مقاومت کم‌تر باشد ( $T_u \leq \phi T_n$ )؛ بدین ترتیب فولاد پیچشی قائم که برای مقاومت در مقابل پیچش محاسباتی  $T_u$  لازم است، به صورت زیر تعیین می‌شود:

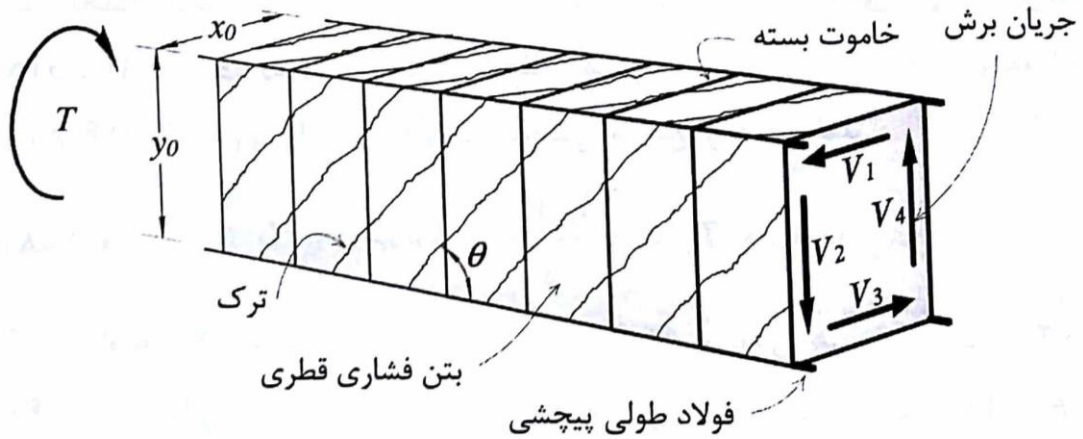
$$A_l = \frac{T_n P_h}{2A_0 f_y} \cot \theta \quad \left(\frac{A_l}{s}\right)_{req} = \frac{T_u}{1.7\phi A_{oh} f_{yl}} \quad (۲۰-۸)$$



شکل ۸-۱۰ تعریف  $A_{oh}$ ؛ الف) مقطع مستطیلی توپر؛ ب) مقطع مستطیلی توخالی؛ ج) مقطع بال‌دار با فولاد پیچشی در جان؛ د) مقطع بال‌دار با فولاد پیچشی در بال و جان

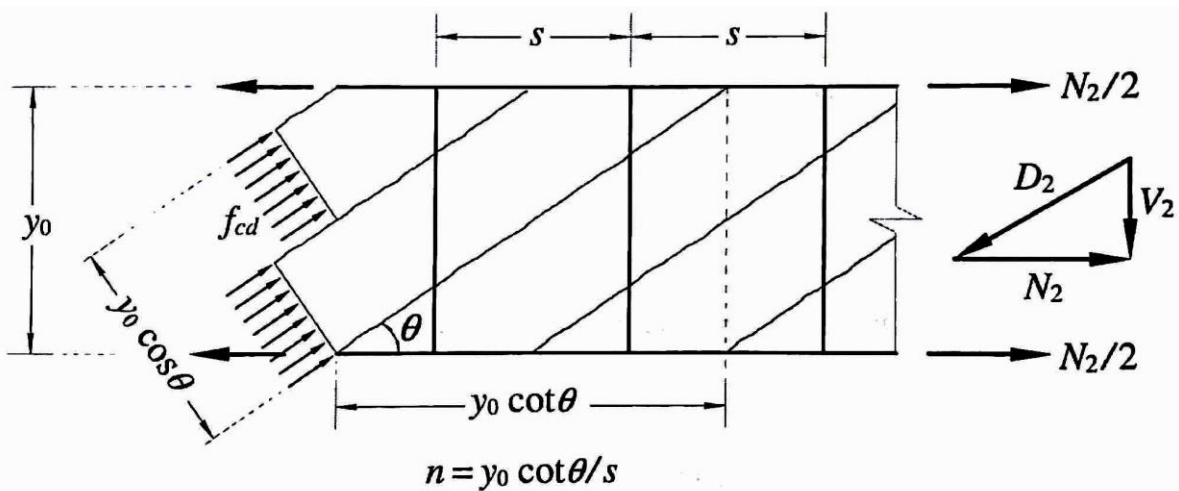


(الف)



(ب)

شکل ۸-۸ مدل تشابه مقطع توخالی جدار نازک- خریابی فضایی در بررسی اثر پیچش خالص بر تیر بتنی



شکل ۹-۸ تجزیه نیروی برشی قائم  $V_2$  در وجه قائم مدل خریابی فضایی به مؤلفه‌های آن و نمایش تنش فشاری قطری ایجاد شده در بتن

## 22.7.6 Torsional strength

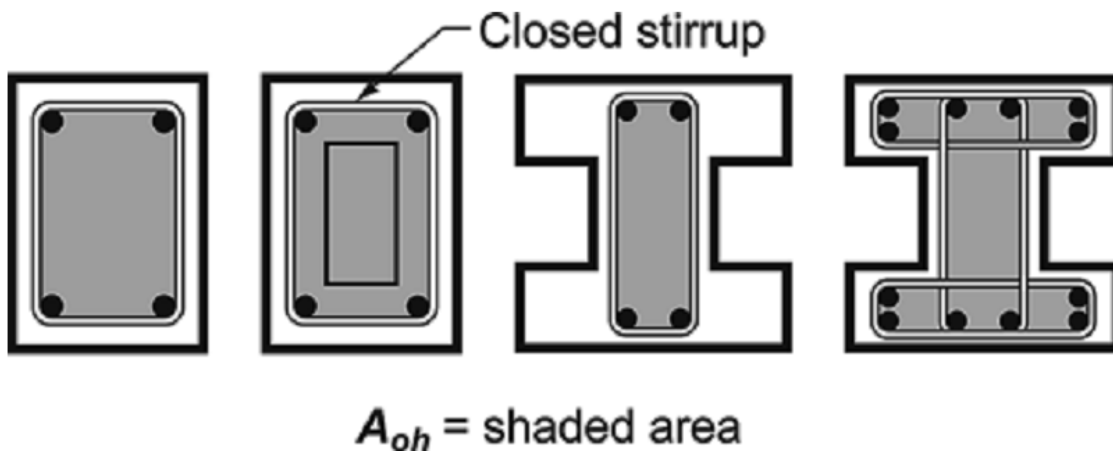
**22.7.6.1** For nonprestressed and prestressed members,  $T_n$  shall be the lesser of (a) and (b):

$$(a) T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s} \cot \theta \quad (22.7.6.1a)$$

$$(b) T_n = \frac{2A_o A_t f_y}{p_h} \cot \theta \quad (22.7.6.1b)$$

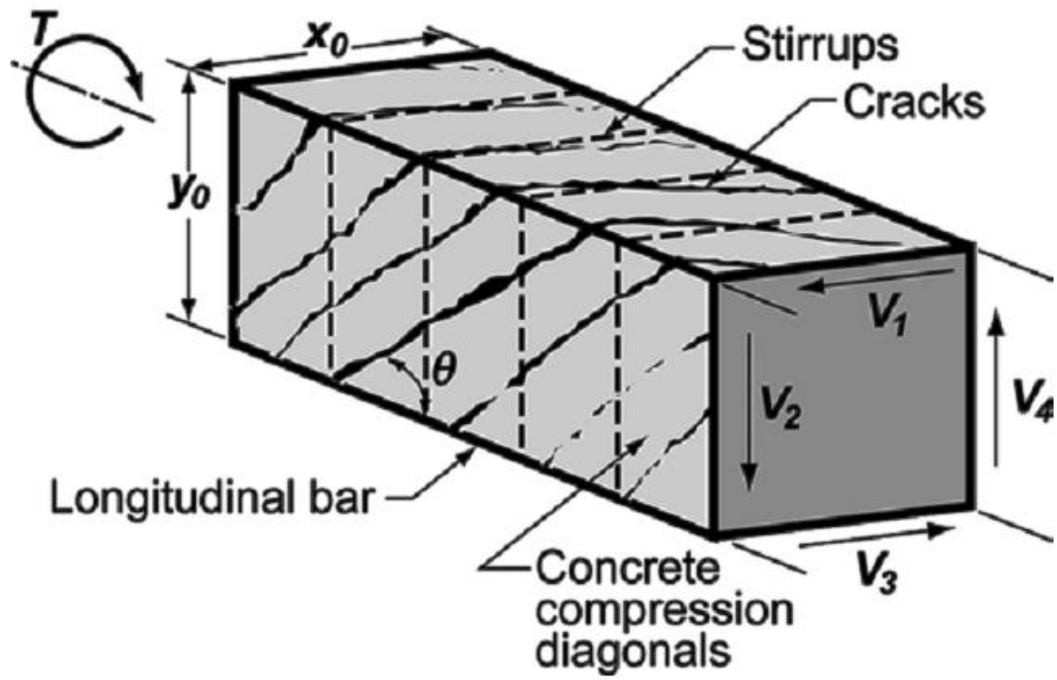
where  $A_o$  shall be determined by analysis,  $\theta$  shall not be taken less than 30 degrees nor greater than 60 degrees;  $A_t$  is the area of one leg of a closed stirrup resisting torsion;  $A_l$  is the area of longitudinal torsional reinforcement; and  $p_h$  is the perimeter of the centerline of the outermost closed stirrup.

**22.7.6.1.1** In Eq. (22.7.6.1a) and (22.7.6.1b), it shall be permitted to take  $A_o$  equal to  $0.85A_{oh}$ .

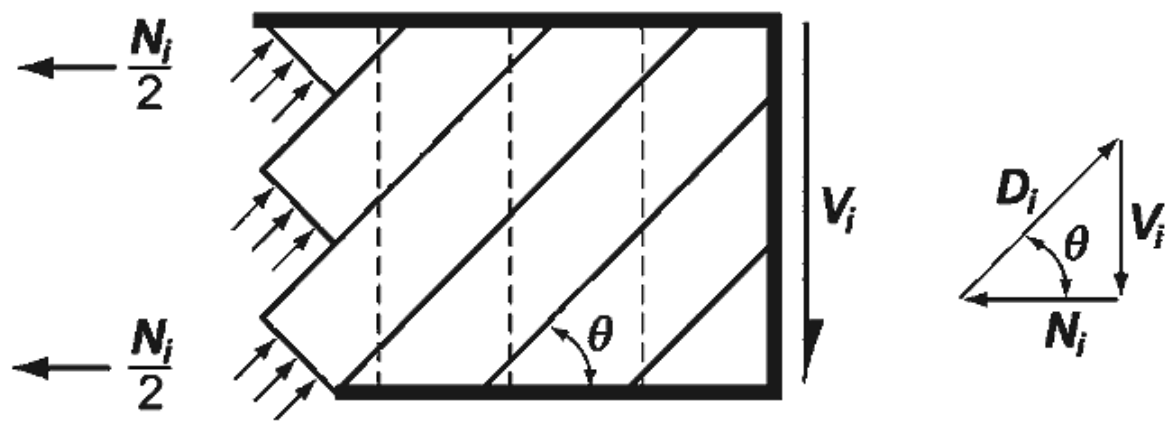


*Fig. R22.7.6.1.1—Definition of  $A_{oh}$ .*





*Fig. R22.7.6.1a—Space truss analogy.*



*Fig. R22.7.6.1b—Resolution of shear force  $V_i$  into diagonal compression force  $D_i$  and axial tension force  $N_i$  in one wall of tube.*

## ۵. ترکیب برش و پیچش

در روش تشابه مقطع توخالی جدار نازک-خرپای فضایی که از سال ۱۹۹۵ به بعد توسط آیین‌نامه مورد استفاده قرار گرفت و در بخش‌های قبلی توضیح داده شد، تمام پیچش توسط فولادهای قائم و طولی پیچشی تحمل می‌شود (روابط ۸-۱۷ و ۸-۲۶). در این روش اگر چه بتن موجود بین ترک‌های مورب، با استفاده از ظرفیت فشاری خود نقش میله‌های رابط فشاری خرپای فضایی را بازی می‌کند، اما ظرفیت برشی بتن به تحمل تنش‌های برشی ناشی از پیچش اختصاص داده نمی‌شود. بنابراین می‌توان تصور کرد که کل ظرفیت برشی بتن و اجزاء مرتبط با آن شامل مقاومت درگیر بودن دانه‌ها و اثرات میخ پرچی فولادهای طولی خمشی، به تحمل برش ( $V_c$ ) اختصاص داده می‌شود و مقدار اختصاص داده شده از ظرفیت برشی بتن به تحمل پیچش، صفر می‌باشد ( $T_c = 0$ ).

با فرضیات فوق، محاسبات برش و محاسبات پیچش در یکدیگر تداخلی نداشته و محاسبات برش را می‌توان به روش متداول که در فصل هفتم ذکر شد، انجام داد. همچنین در محاسبه ظرفیت برشی بتن،  $V_c$  را می‌توان به صورت متداول و مثلاً از روابط (۷-۲۰) یا (۷-۲۱) به دست آورد. با این توضیحات داریم:

$$\left(\frac{A_v}{s}\right)_{req} = \frac{(V_u / \phi) - V_c}{f_{yt} d} \quad , \quad \left(\frac{A_t}{s}\right)_{req} = \frac{T_u}{1.7\phi A_{oh} f_{yt}}$$

$$\left(\frac{A_T}{s}\right)_{req} = \left(\frac{A_{v+t}}{s}\right)_{req} = \left(\frac{A_v}{s}\right)_{req} + 2\left(\frac{A_t}{s}\right)_{req} \quad (27-8)$$

در رابطه فوق، منظور از  $A_T$  سطح مقطع شاخه‌های قائم خاموت بسته دو شاخه است که برای مقاومت در مقابل برش و پیچش توام مورد نیاز می‌باشد. سطح مقطع شاخه‌های قائم خاموت دو شاخه لازم برای مقاومت در مقابل برش و پیچش توام به صورت  $A_{v+t}$  نیز نشان داده می‌شود. رابطه (۸-۲۷) توسط بسیاری از آیین‌نامه‌ها و از جمله ACI 318 مورد قبول بوده و برای محاسبه خاموت لازم برای اثرات پیچش و برش توام در مقطع به کار می‌رود.

**R9.5.4.3** The requirements for torsional reinforcement and shear reinforcement are added and stirrups are provided to supply at least the total amount required. Because the reinforcement area  $A_v$  for shear is defined in terms of all the legs of a given stirrup while the reinforcement area  $A_t$  for torsion is defined in terms of one leg only, the addition of transverse reinforcement area is calculated as follows:

$$\text{Total} \left( \frac{A_{v+t}}{s} \right) = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s} \quad (\text{R9.5.4.3})$$

عضو بتن آرمه که به خاموت‌های قائم و فولادهای طولی پیچشی مسلح شده باشد و تحت پیچش یا ترکیب پیچش و برش قرار گرفته باشد، در حالت ایده‌آل همراه با جاری شدن خاموت‌ها و فولادهای طولی گسیخته خواهد شد؛ این همان فرضی است که قبلاً در استخراج روابط مربوط به خاموت‌های قائم و فولاد طولی پیچشی مورد استفاده قرار گرفت. با این وجود برای چنین عضوی دو احتمال دیگر نیز برای حالت شکست وجود دارد؛ ممکن است شکست این عضو به دلیل خرد شدن بتن در اثر نیروهای فشاری قطری باشد (نیروی  $D_2$  در شکل ۸-۹)؛ همچنین ممکن است شکست عضو به دلیل باز شدن بیش از حد ترک‌های مورب تحت بارهای سرویس (بارهای بهره‌برداری) باشد که به دنبال آن احتمالاً نفوذ آب در ترک‌ها و خوردگی خاموت‌ها رخ می‌دهد.

**22.7.7.1** Cross-sectional dimensions shall be selected such that (a) or (b) is satisfied:

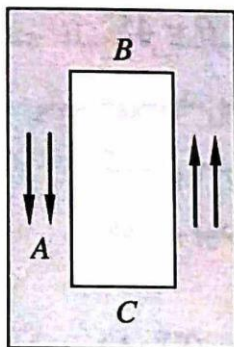
(a) For solid sections

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left( \frac{V_c}{b_w d} + 0.66 \sqrt{f'_c} \right) \quad (22.7.7.1a)$$

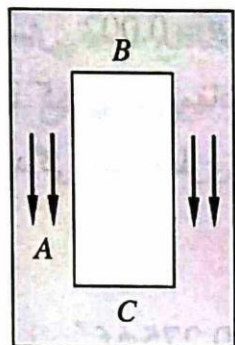
(b) For hollow sections

$$\left( \frac{V_u}{b_w d} \right) + \left( \frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \right) \leq \phi \left( \frac{V_c}{b_w d} + 0.66 \sqrt{f'_c} \right) \quad (22.7.7.1b)$$

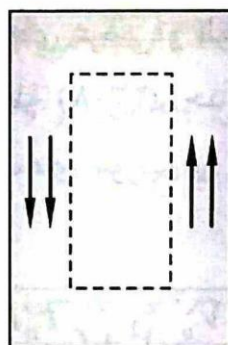




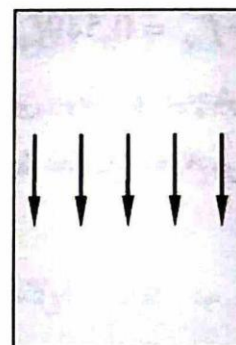
تنش‌های پیچشی



تنش‌های برشی



تنش‌های پیچشی



تنش‌های برشی

(الف)

(ب)

شکل ۸-۱۱ جمع تنش‌های برشی ناشی از برش و پیچش؛ (الف) در مقطع توخالی؛ (ب) در مقطع توپر

## ۷ جزئیات فولاد گذاری پیچشی

از آنجا که ترک‌های مورب پیچشی به صورت حلقوی در پیرامون مقطع تیر توسعه یافته و به پیش می‌روند، خاموت‌های پیچشی باید در هر چهار وجه تیر امتداد داشته باشند. به همین جهت *ACI 318* قید می‌کند که فولادگذاری پیچشی شامل فولادهای طولی پیچشی و فولاد عرضی پیچشی است؛ به طوری که فولاد عرضی پیچشی شامل یک یا چند نوع از انواع زیر باشد:

- ۱- خاموت بسته عمود بر محور طولی تیر، به طوری که این خاموت در انتها با قلاب با زاویه ۱۳۵ درجه حول فولاد طولی مهار شده باشد.
- ۲- شبکه سه بعدی بسته‌ای از سیم جوش شده، به طوری که سیم‌های عرضی عمود بر محور طولی تیر باشند.
- ۳- فولادگذاری حلقوی.

به علاوه *ACI 318* قید می‌کند که در مقاطع توخالی تحت پیچش، فاصله خط مرکزی فولاد عرضی پیچشی از وجه داخلی دیواره مقطع توخالی، نباید کم‌تر از  $0.5A_{oh} / P_h$  گرفته شود.

**9.7.6.3.1** If required, transverse torsional reinforcement shall be closed stirrups satisfying **25.7.1.6** or hoops.

**9.7.6.3.4** For hollow sections, the distance from the centerline of the transverse torsional reinforcement to the inside face of the wall of the hollow section shall be at least  $0.5A_{oh}/p_h$ .

### ب- فاصله فولادهای عرضی پیچشی

محاسبه فولاد عرضی پیچشی لازم بر اساس رابطه (۸-۲۰) انجام می‌شود؛ و در حالت وجود پیچش و برش توأم، از رابطه (۸-۲۷) استفاده می‌گردد. این محاسبات در حالتی قابل قبول است که روابط (۸-۲۸) یا (۸-۲۹) کنترل شوند؛ در غیر این صورت باید ابعاد مقطع افزایش داده شود.

فاصله فولادهای عرضی پیچشی بر اساس ACI 318 نباید از مقدار زیر ( $s_{max}$ ) بیش‌تر شود:

$$s_{max} = \min \{ P_h / 8 , 300 \text{ mm} \} \quad (۸-۳۵)$$

**9.7.6.3.3** Spacing of transverse torsional reinforcement shall not exceed the lesser of  $p_h/8$  and 300 mm.

اگر فولادهای عرضی برای تحمل پیچش و برش توأم به‌کار روند، علاوه بر رابطه فوق، محدودیت‌های مربوط به فاصله حداکثر فولادهای عرضی برشی (روابط ۷-۳۷) نیز باید کنترل شوند و کوچک‌ترین مقدار بر اساس کنترل  $s_{max}$  در پیچش و برش، منظور گردد.

ACI 318 قید می‌کند که فولادهای پیچشی (شامل خاموت‌ها و فولادهای طولی پیچشی) باید حداقل به اندازه فاصله  $b_t + d$  تا پس از نقطه‌ای که از نظر تئوری لازم هستند (بر اساس رابطه ۸-۱۲)، ادامه داده شوند؛ که  $b_t$  عرض قسمتی از مقطع است که شامل تنگ بسته پیچشی است (اکثراً  $b_t = b_w$ ). این نکته با توجه به این واقعیت است که ترک‌های پیچشی به صورت حلقوی در تیر گسترش می‌یابند.

**9.7.6.3.2** Transverse torsional reinforcement shall extend a distance of at least  $(b_t + d)$  beyond the point required by analysis.

### ج- حداقل فولاد پیچشی

ACI 318 حداقل فولاد عرضی پیچشی را چه در حالت پیچش خالص و چه در حالت پیچش و برش توأم، با رابطه‌ای مشابه رابطه (۷-۳۸)، به صورت زیر بیان می‌کند:

$$\left(\frac{A_{v+t}}{s}\right)_{\min} = \left(\frac{A_v}{s} + 2\frac{A_t}{s}\right)_{\min} = \frac{1}{16} \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yt}} \geq \frac{1}{3} \frac{b_w}{f_{vr}} \quad (۳۶-۸)$$

**9.6.4.2** If torsional reinforcement is required, minimum transverse reinforcement  $(A_v + 2A_t)_{\min}/s$  shall be the greater of (a) and (b):

$$(a) 0.062 \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (b) 0.35 \frac{b_w}{f_{yt}}$$

ACI 318 هم‌چنین در هر جا که رابطه (۸-۱۲) برقرار نباشد و پیچش وارد محاسبات شود، حداقل فولاد طولی پیچشی لازم  $A_{l,\min}$  را به صورت زیر تعیین می‌کند:

$$A_{l,\min} = \frac{5}{12} \frac{\sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_y} - \left(\frac{A_t}{s}\right) P_h \frac{f_{yt}}{f_y} \quad (۳۷-۸)$$

در رابطه فوق،  $A_t/s$  از رابطه (۸-۲۰) محاسبه شده و نباید کمتر از  $(1/6)b_w/f_{yt}$  گرفته شود.

**9.6.4.3** If torsional reinforcement is required, minimum area of longitudinal reinforcement  $A_{l,\min}$  shall be the lesser of (a) and (b):

$$(a) 0.42 \sqrt{f'_c} \frac{A_{cp}}{f_{yt}} - \left(\frac{A_t}{s}\right) P_h \frac{f_{yt}}{f_y}$$

$$(b) 0.42 \sqrt{f'_c} \frac{A_{cp}}{f_{yt}} - \left(\frac{0.175 b_w}{f_{yt}}\right) P_h \frac{f_{yt}}{f_y}$$

#### د- مشخصات فولاد گذاری طولی پیچشی

سطح مقطع فولاد طولی پیچشی لازم ( $A_l$ ) بر اساس رابطه (۸-۲۶) تعیین می‌شود. عبارت  $A_l / s$  در رابطه (۸-۲۶) بر اساس محاسبات پیچش مبتنی بر مقدار محاسبه شده از رابطه (۸-۲۰) (و نه بر اساس حداقل مقدار به دست آمده از رابطه (۸-۳۶)، جای گذاری می‌شود. مقدار فولاد طولی پیچشی لازم نباید از مقدار  $A_{l,min}$  که از رابطه (۸-۳۷) محاسبه می‌شود، کمتر در نظر گرفته شود.

ACI 318 قید می‌کند که فولادهای طولی پیچشی باید در هر چهار وجه داخلی خاموت‌های بسته به طور یکنواخت توزیع شوند. در هر گوشه خاموت بسته باید حداقل یک فولاد طولی پیچشی قرار داده شود. فاصله فولادهای طولی پیچشی نباید بیش از ۳۰۰ میلی‌متر باشد. حداقل قطر میلگرد طولی پیچشی برابر یک بیست و چهارم فاصله خاموت‌ها، ولی نه کمتر از ۱۰ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود ( $\Phi_l \geq \max \{s / 24, 10 \text{ mm}\}$ ).

### 9.7.5 Longitudinal torsional reinforcement

**9.7.5.1** If torsional reinforcement is required, longitudinal torsional reinforcement shall be distributed around the perimeter of closed stirrups that satisfy 25.7.1.6 or hoops with a spacing not greater than 300 mm. The longitudinal reinforcement shall be inside the stirrup or hoop, and at least one longitudinal bar or tendon shall be placed in each corner.

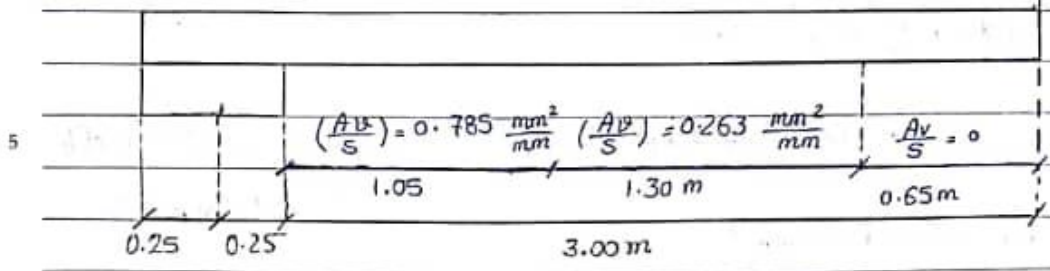
**9.7.5.2** Longitudinal torsional reinforcement shall have a diameter at least 0.042 times the transverse reinforcement spacing, but not less than 10 mm.

**9.7.5.4** Longitudinal torsional reinforcement shall be developed at the face of the support at both ends of the beam.

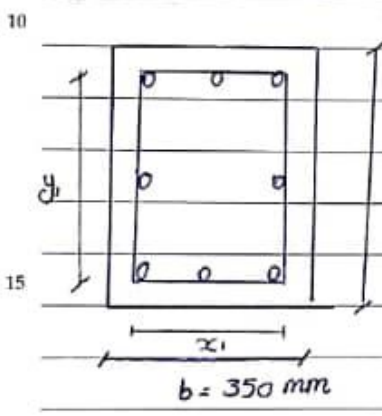


آن مقدار از فولادهای طولی پیچشی که به وجه کششی مقطع تعلق می‌یابد، می‌تواند در کنار فولادهای خمشی قرار داده شود. همچنین می‌توان سطح مقطع فولادهای طولی پیچشی متعلق به وجه کششی مقطع را با سطح مقطع فولادهای خمشی جمع کرده و برای مجموع آنها فولاد طولی مناسب طرح نمود. از طرفی ACI 318 اجازه می‌دهد که سطح مقطع آن مقدار از فولادهای طولی پیچشی که در ناحیه فشاری خمشی قرار دارد، به میزان  $M_u / (0.9d f_y)$  کاسته شود؛ که  $M_u$  لنگر با ضریبی است که به طور هم‌زمان با  $T_u$  اثر می‌کند. این کاهش به شرط آن است که سطح مقطع فولادهای طولی پیچشی از مقدار حداقل رابطه (۸-۳۷) کم‌تر نشود.

**9.5.4.5** It shall be permitted to reduce the area of longitudinal torsional reinforcement in the flexural compression zone by an amount equal to  $M_u / (0.9df_y)$ , where  $M_u$  occurs simultaneously with  $T_u$  at that section, except that the longitudinal reinforcement area shall not be less than the minimum required in 9.6.4.



$(\frac{A_{13}}{S}) = 0.785 \frac{mm^2}{mm}$      $(\frac{A_{12}}{S}) = 0.263 \frac{mm^2}{mm}$      $\frac{A_v}{S} = 0$



سؤال: برای سیم‌کشی فولاد برین سیم‌کشی را طراحی کنید

$f'_c = 28 \text{ MPa}$  ;  $f_y = 420 \text{ MPa}$     درجه ۳

$V_u = 190 \text{ kN}$  ;  $T_u = 30 \text{ kN.m}$

$A_s$  for  $M_u = 2050 \text{ mm}^2$     clear cover: 40 mm

$d_{tr} = 12 \text{ mm}$

$x = b = 350 \text{ mm}$   
 $y = h = 650 \text{ mm}$

کام اول ظرفیت سیم‌کشی بتن آیا فولاد برین برای بتن لازم است؟

$A_{cp} = xy = 350 \times 650 = 22.75 \times 10^4 \text{ mm}^2$

$P_{cp} = 1(x+y) = 2(350+650) = 2 \times 10^3 \text{ mm}$

$T_{cr} = 0.33 \lambda \sqrt{f'_c} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} = 0.33 \times 1 \sqrt{28} \times \frac{(22.75 \times 10^4)^2}{2 \times 10^3} = 45.6 \times 10^6 \text{ N.mm}$

$T_{cr} = 45.6 \text{ kN.m}$      $T_{th} = 0.25 T_{cr} = 11.4 \text{ kN.m}$

$\nless T_{th} = 0.75 \times 11.4 = 8.56 \text{ kN.m} \nless T_u = 30 \text{ kN.m}$

فولاد برین نیاز است.

$$x_1 = 350 - 2 \left( 40 + \frac{12}{2} \right) = 258 \text{ mm}$$

نام هم فاصله جواسی سطح:

$$y_1 = 650 - 2 \left( 40 + \frac{12}{2} \right) = 558 \text{ mm}$$

$$A_{oh} = x_1 y_1 = 258 \times 558 = 14.4 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

5  $A_{oh}$ : مساحت محصوره بر روی ترین

$$A_o = 0.85 A_{oh} = 12.2 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

سخت ضابوت یعنی

$$P_h = 2(x_1 + y_1) = 2(258 + 558) = 1632 \text{ mm}$$

$A_o$ : مساحت محصوره بر روی ترین برش

$$d = 650 - 40 - 12 - \frac{25}{2} = 585.5 \text{ mm}$$

$P_h$ : محیط در بزرگترین برش بر روی ترین بسته

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u P_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 0.66 \sqrt{F'_c}\right)$$

نام سوم - کنترل رابطه ابعاد برای تعاقب ضعیف:

$$V_c = 0.17 \lambda \sqrt{F'_c} b_w d = 0.17 \times 1 \times \sqrt{28} \times 350 \times 586 = 184 \times 10^3 \text{ N} = 184 \text{ kN}$$

$$\sqrt{\left(\frac{190 \times 10^3}{350 \times 586}\right)^2 + \left(\frac{30 \times 10^6 \times 1632}{1.7 \times (14.4 \times 10^4)^2}\right)^2} \leq 0.75 \left[ \frac{184 \times 10^3}{350 \times 586} + 0.66 \sqrt{28} \right]$$

$$1.67 \leq 3.29 \quad \checkmark$$

رابطه کنترل ابعاد در برقراری یعنی ضعیف یعنی مقاومت کافی در مشارکت برش یعنی بر خوردار است.

نام چهارم - تعیین فولاد عرض یعنی فولاد نیاز: فرض  $\theta = 45^\circ$ ,  $\cot \theta = 1$

$$T_n = 2 A_o \frac{A_t}{s} f_y t \cot \theta = \frac{T_u}{\phi} = \frac{30 \times 10^6}{0.75} = 40 \times 10^6 \text{ N.mm}$$

$$\rightarrow \frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2 A_o f_y t \cot \theta} = \frac{40 \times 10^6}{2 \times 12.2 \times 10^4 \times 420 \times 1} \rightarrow \frac{A_t}{s} = 0.390 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$



$$V_u = 190 \times 10^3 \text{ N}$$

گام پنجم - تعیین دوز عینی برای برش

$$V_c = 184 \times 10^3 \rightarrow \frac{V_c}{2} = 92 \times 10^3 \text{ N}$$

$$V_u > \phi \frac{V_c}{2} = 0.75 \times 92 = 69 \text{ kN} \rightarrow \text{فشار برشی مورد نیاز است}$$

$$V_u = \phi (V_c + V_s) \rightarrow V_s = 69.3 \text{ kN}$$

$$V_s = \frac{A_{sv} f_{yt} d}{s} \rightarrow \frac{A_{sv}}{s} = \frac{V_s}{f_{yt} d} = \frac{69.3 \times 10^3}{420 \times 586} = 0.281 \left( \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \right)$$

$$\frac{A_{sv} + 2A_t}{s} = 2 \times 0.390 + 0.281 = 1.061 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

گام ششم - انتخاب فولاد عینی و برآورد آن

$$s = \frac{2 \times \frac{\pi}{4} \times 12^2}{1.061} = 213 \text{ mm}$$

با استفاده از ضریب  $\Phi 12$

$$s_{\max} = \min \left\{ \frac{Pl_c}{8}, 300 \text{ mm} \right\} = \min \left\{ \frac{1632}{8}, 204, 300 \right\} = 204 \text{ mm}$$

$$V_s = 69.3 \times 10^3 \text{ N}; 0.33 \sqrt{f_c} b_w d = 0.33 \sqrt{28} \times 350 \times 586 = 358 \times 10^3 \text{ N}$$

$$V_s = 69.3 \times 10^3 \text{ N} \ll 358 \times 10^3 \text{ N}$$

$$s_{\max} = \min \left\{ \frac{d}{2}, 600 \text{ mm} \right\} = \min \left\{ \frac{586}{2}, 600 \right\} = 293 \text{ mm}$$

$$s_{\max} = \min \{ 204, 293 \} = 204 \text{ mm}$$

بر اساس ضوابط فاصله برش و کشش

$$s = 200 \text{ mm}$$

طراحی می کنیم

$$\frac{A_{sv} + 2A_t}{s} = 1.13 \left( \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \right)$$

$$\left( \frac{A_{sv} + 2A_t}{s} \right)_{\min} = \max \left\{ \begin{aligned} &0.35 b_w / f_{yt} = 0.35 \times 350 / 420 = 0.292 < 1.13 \text{ OK} \\ &0.062 \sqrt{f_c} b_w / f_{yt} = 0.062 \sqrt{28} \times 350 / 420 = 0.275 < 1.13 \text{ OK} \end{aligned} \right.$$

نام صفت - طراحی تیرار به سببی طراحی :  $\theta = 45^\circ$   $\cos \theta = 1$

$$T_n = \frac{2A_0 A_e F_y}{P_h \cos \theta}$$

$$\Rightarrow 40 \times 10^6 = \frac{2 \times 12.2 \times 10^4 \times A_e \times 420}{1632} \Rightarrow A_e = 637 \text{ mm}^2$$

$$A_{e, \min} = \min. \left[ 0.42 \sqrt{F_c} \frac{A_{cp}}{F_{yt}} - \left( \frac{A_t}{s} \right) P_h \frac{F_{yt}}{F_y} \right]$$

$$= 0.42 \sqrt{28} \times \frac{22.75 \times 10^4}{420} - 0.390 \times 1632 \times \frac{420}{420} = 567 \text{ mm}^2$$

$$0.42 \sqrt{F_c} \frac{A_{cp}}{F_{yt}} - \left( \frac{0.175 b_w}{120} \right) P_h \frac{F_{yt}}{F_y}$$

$$= 0.42 \sqrt{28} \times \frac{22.75 \times 10^4}{420} - \frac{0.175 \times 350}{420} \times 1632 \times \frac{420}{420} = 966 \text{ mm}^2$$

$$A_{e, \min} = \min \{ 567, 966 \} = 567$$

$$A_e = 637 > A_{e, \min} = 567 \text{ mm}^2$$

USE 6# 12 :  $A_e = 679 \text{ mm}^2$  OK.

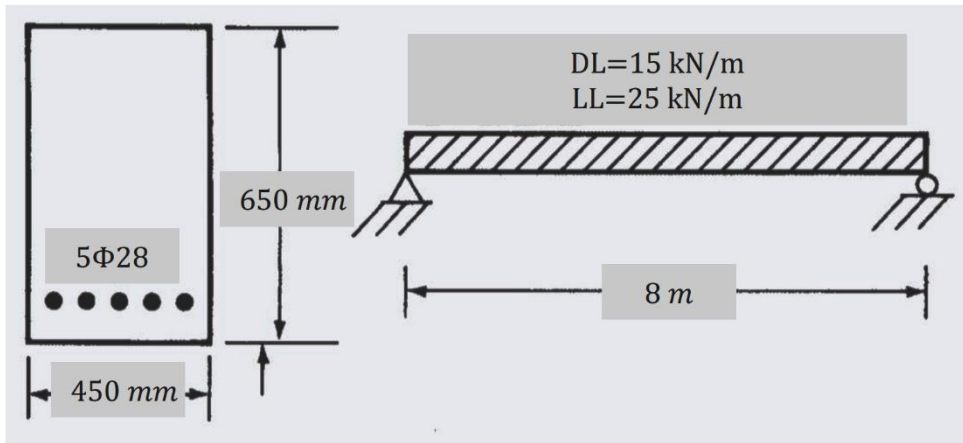


تیر شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت تاثیر بار گسترده یکنواخت مرده و زنده به ترتیب با مقدار  $DL$  و  $LL$  قرار دارد. به همین ترتیب، گشتاور پیچشی تکیه‌گاه‌ها تحت اثر بار مرده و زنده  $T_D$  و  $T_L$  است. قطر تنگ بسته  $d_t = 12 \text{ mm}$  و کاور خالص بتن تا پشت تنگ  $d_c = 40 \text{ mm}$  است. برای اثر توام پیچش و برش در محل تکیه‌گاه، تیر را طراحی کنید و تمامی کنترل‌های لازم را بر اساس آیین‌نامه  $ACI$  انجام دهید.

داده‌های مسئله:

$$f_y = 350 \text{ MPa}; \quad f'_c = 28 \text{ MPa};$$

$$T_D = 40 \text{ kN.m}, \quad T_L = 45 \text{ kN.m}; \quad DL = 15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}; \quad LL = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$



$T_D = 40 \text{ kN.m}$	$DL = 15 \text{ kN/m}$	کنترل ترکیب برش + پیچش:	
$T_L = 45 \text{ kN.m}$	$LL = 25 \text{ kN/m}$	$b = 450 \text{ mm}$	$h = 650 \text{ mm}$
$f'_c = 28 \text{ MPa}$	$d_t = 12 \text{ mm}$	$A_s = 5\Phi 28$	
$f_y = f_{yt} = 350 \text{ MPa}$	$d_c = 40 \text{ mm}$		

گام اول تعیین ظرفیت خمشی بتن - آیا فولاد برای خمشی نیاز است؟ (۲)

$$x = b = 450 \text{ mm} \quad A_{cp} = xy = 450 \times 650 = 292.5 \times 10^3 \text{ mm}^2$$
$$y = h = 650 \text{ mm} \quad P_{cp} = 2(x+y) = 2(450+650) = 2.2 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$T_{cr} = 0.33 \lambda \sqrt{F'_c} \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} = 0.33 \times 1 \sqrt{28} \times \frac{(292.5 \times 10^3)^2}{2.2 \times 10^3} = 67.9 \times 10^6 \text{ N.mm}$$

$$T_{cr} = 67.9 \text{ kN.m}$$

$$T_{th} = 0.25 T_{cr} = 17.0 \text{ kN.m}$$

$$\phi T_{th} = 0.75 \times 17 = 12.7 \text{ kN.m}$$

$$T_u = 1.4 T_D = 56 \text{ kN.m}$$

$$T_u = 1.2 T_D + 1.6 T_L = 1.2 \times 40 + 1.6 \times 45 = 120 \text{ kN.m}$$

$$T_u = \max \{ 56, 120 \} = 120 \text{ kN.m}$$

$$\phi T_{th} = 12.7 \text{ kN.m} < T_u = 120 \text{ kN.m} \rightarrow \text{فولاد بلیچنی نیاز است.}$$

$$x_1 = 450 - 2(40 + 12/2) = 358 \text{ mm}$$

گام دوم (3) تعیین خواص مقطع فولاد (4)

$$y_1 = 650 - 2(40 + 12/2) = 558 \text{ mm}$$

$$A_{oh} = x_1 y_1 = 358 \times 558 = 200 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_o = 0.85 A_{oh} = 170 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

بسم کنگر دابطه اعباري : (۲۰۱۵)

$$V_D = \frac{wDL}{2} = 60 \text{ kN}$$

$$1. V_u = 1.4 V_D = 84 \text{ kN}$$

$$V_L = \frac{wL}{2} = 100 \text{ kN}$$

$$2. V_u = 1.2 V_D + 1.6 V_L = 232 \text{ kN}$$

$$V_u = \max \{ 84, 232 \} = 232 \text{ kN} ; V_c = 0.17 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d = 236 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\sqrt{\left(\frac{232 \times 10^3}{450 \times 584}\right)^2 + \left(\frac{120 \times 10^6 \times 1832}{1.7 \times (200 \times 10^3)^2}\right)^2} \leq 0.75 \left(\frac{236 \times 10^3}{450 \times 584} + 0.66 \sqrt{28}\right)$$

$$3.35 \leq 3.30$$

در حد ۱.۵٪ خطا قابل قبول است.

$$\theta = 45^\circ \quad \cot \theta = \tan \theta = 1$$

بسم چهارم - تعیین فولاد عرضي بعرضي : (۱۸)

$$T_n = \frac{2 A_o A_t f_{yt}}{s} \cot \theta ; T_n = \frac{T_u}{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{120 \times 10^6}{0.75} = 2 \times 170 \times 10^3 \times \frac{A_t}{s} \times 350 \times 1 \Rightarrow \frac{A_t}{s} = 1.34 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

$$V_u = 232 \text{ kN}$$

بسم پنجم - تعیین فولاد عرضي بعرضي : (۱۸)

$$V_c = 236 \text{ kN} \Rightarrow \phi \frac{V_c}{2} = 0.75 \times \frac{236}{2} = 88.5 \text{ kN}$$

$$V_u = \phi (V_s + V_c) \Rightarrow 232 = 0.75 (236 + V_s) \Rightarrow V_s = 73.3 \text{ kN}$$

$$V_s = A_o f_{yt} \frac{d}{s} \Rightarrow \frac{A_o}{s} = 0.359 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

بسم ششم - تعیین فواصل فولاد عرضي بعرضي + بعرضي : (۲۰۱۵)

$$\frac{A_o}{s} + \frac{2 A_t}{s} = 0.359 + 2 \times 1.34 = 3.039 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

$$\left(\frac{A_o}{s} + \frac{2 A_t}{s}\right)_{\min} = \max \begin{cases} 0.35 b_w / f_{yt} = 0.45 \\ 0.062 \sqrt{f'_c} b_w / f_{yt} = 0.421 \end{cases}$$

$$3.039 > 0.450 \quad \text{O.K.}$$

$$3.039 = \frac{2 \times \frac{\pi}{4} \times 12^2}{s} \Rightarrow s = 74.4 \text{ mm} \quad : \text{با استاندارد از حادیت } \Phi 12$$

$$s_{\max} = \min \{ Ph 18, 300 \} = 229 \text{ mm} \quad s \rightarrow 75 \text{ mm} \text{ با اندک خطای قابل قبول}$$

$$V_s = 73.3 \times 10^3 \text{ N} \ll 0.33 \sqrt{f'_c} b_w d = 459 \times 10^3 \text{ N}$$

$$s_{\max} = \min \{ d/2, 600 \} = 292 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow s_{\max} = \{ 229, 292 \} = 229 \text{ mm}$$

$$s = 75 < s_{\max} = 229 \text{ mm} \quad \text{o.k.}$$

$$T_n = 2 A_o \frac{A_l}{P_h} f_{yt} c t \theta = \frac{T_u}{\phi}$$

کام صمیم - مرالی دوبار سعی طری (115)

$$\Rightarrow \frac{120 \times 10^6}{0.75} = 2 \times 170 \times 10^3 \frac{A_l}{1832} \times 350 \times 1 \Rightarrow A_l = 2463 \text{ mm}^2$$

$$A_{l, \min} = \min \left[ 0.42 \sqrt{f'_c} \frac{A_{cp}}{f_{yt}} - \left( \frac{A_t}{s} \right) P_h \frac{f_{yt}}{f_y} \right] = -598$$

$$\bullet 0.42 \sqrt{f'_c} \frac{A_{cp}}{f_{yt}} = 0.175 b_w P_h \frac{f_{yt}}{f_y} = 1445$$

$$A_l = 2463 \gg \{ -598, 1445 \} \quad \text{o.k.} \quad \text{USE } 10 \Phi 18 \quad A_s = 2544 \text{ mm}^2$$